統計分析

第二講

王寧寧， Ph.D

oliningning@qq.com

2022/11/1

主要内容

- 參數估計
- 假設檢驗
- t檢驗
- 方差分析

統計推斷

- 參數估計
  - 點估計
  - 區間估計
- 假設檢驗

參數估計

基本統計概念

- 總體： $X \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 樣本： $X_1, X_2, \cdots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$
- 統計量： $\bar{X}, S$ （點估計）
- 如何估計 μ？
- 用樣本均值 $\bar{X}$ 估計 μ
- 樣本均值的標准差（標準誤）： $S_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

抽樣誤差

- 樣本均值的標準差也稱爲**抽樣誤差**
- 抽樣誤差的大小反映 $\bar{X}$估計參數 μ的波動
- $S_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$
- 實際應用中： $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$

【例】求140名成年男子紅細胞數目的抽樣誤差（標准誤）

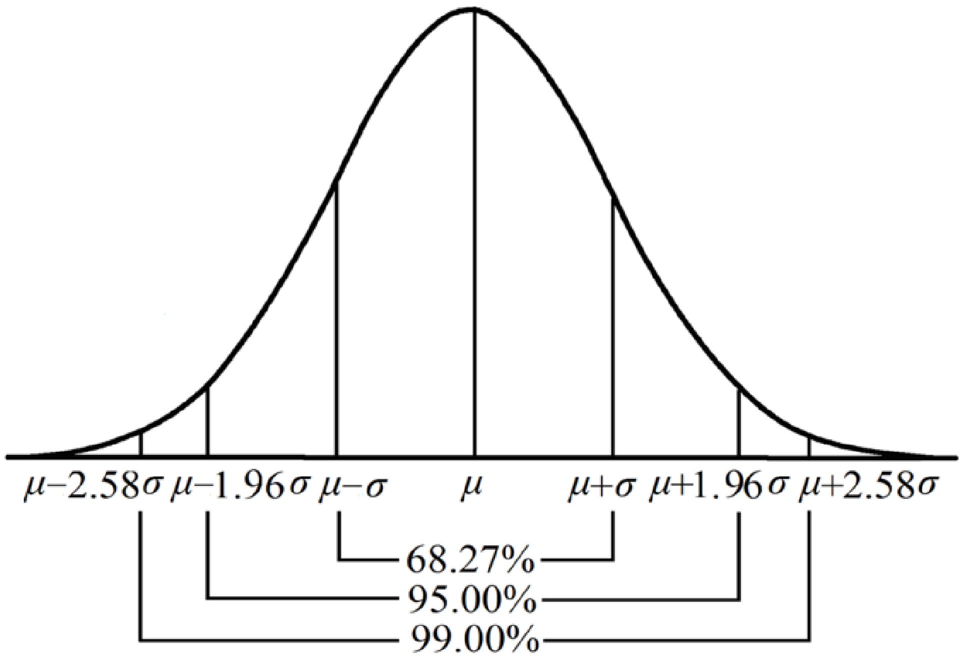
- $\bar{X} = 4.77, \quad S = 0.38$
- $S_{\bar{X}} = \frac{S}{\sqrt{n}} = \frac{0.38}{\sqrt{140}} = 0.032$

可信區間（區間估計）

- 點估計： $\hat{\mu} = \bar{X}$
- 區間估計： 按照預先給定的概率，計算出一個區間，能夠包含 μ
- 事先給定的概率稱爲可信度，計算的區間成爲可信區間（confidence interval, CI）
- 一般求95%的區間估計

μ的區間估計（假定 σ已知情形）

$$\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$$



$$P(\mu - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 0.95$$

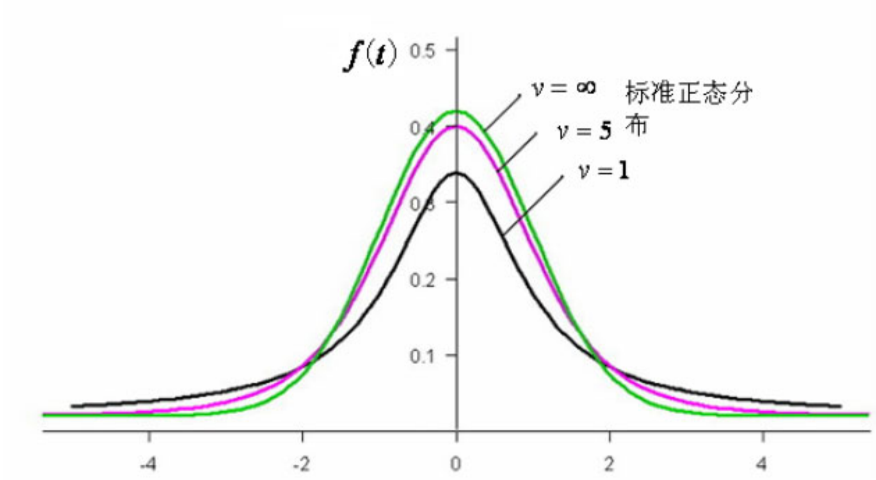
σ已知時， μ 的區間估計：

$$(\bar{X} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

σ未知時，是否就是：

$$(\bar{X} - 1.96\frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96\frac{S}{\sqrt{n}})$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$



不同自由度的 t 分布图

William Gosset

$$P(-t_{0.05/2} < \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} < t_{0.05/2} = 0.95$$

$$P(\bar{X} - t_{0.05/2} S_{\bar{X}} < \mu < \bar{X} + t_{0.05/2} S_{\bar{X}}) = 0.95$$

μ的95%可信區間：

$$(\bar{X} - t_{0.05/2} S_{\bar{X}}，\ \bar{X} + t_{0.05/2} S_{\bar{X}})$$

大樣本時： $t_{0.05/2}$約等於 $1.96(Z_{0.05/2})$

【例】求上例中，成年男子紅細胞數總體均值的95%可信區間。

$$\bar{X} = 4.77\text{，}\ S = 0.38$$

- 方法壹：利用t分佈，

$$\bar{X} - t_{0.05/2} S_{\bar{X}} = 4.77 - 1.98 \times 0.03 = 4.71$$

$$\bar{X} + t_{0.05/2} S_{\bar{X}} = 4.77 + 1.98 \times 0.03 = 4.83$$

【例續】

- 方法貳：

$$\bar{X} - z_{0.05/2} S_{\bar{X}} = 4.77 - 1.96 \times 0.03 = 4.71$$

$$\bar{X} + z_{0.05/2} S_{\bar{X}} = 4.77 + 1.96 \times 0.03 = 4.83$$

假設檢驗

假設檢驗的基本原理

- 關於總體參數的推斷
- 小概率事件原理
- 例：已知成年男子紅細胞數目均值為 4.75×10^{12}/L，某地抽取140個樣本，問此地的成年男子紅細胞數目是否達到均值水平？

基本步驟

- 1、 建立檢驗假設，確定檢驗水準
  - H_0: $\mu_0 = 4.75$ 此地的成年男子紅細胞數目的總體均值為**4.75**
  - H_1: $\mu_0 \neq 4.75$
  - $\alpha = 0.05$
- 2、 計算檢驗統計量：

$$T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

- 2、續：帶入140樣本信息，可以算出：

$$T = 0.823 \sim t(139)$$

- 3、計算P值，做出結論
    - **P**值：檢驗統計量不利於原假設的概率
    - **P=0.412**大於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，不能拒絕原假設
    - 結論：不能拒絕此地的成年男子紅細胞數目已達到均值水平

t檢驗

t檢驗的分類

- 單樣本的t檢驗
- 配對樣本t檢驗
- 獨立樣本t檢驗

配對樣本t檢驗

> 【例】某项研究评估咖啡因对运动者的心肌血流量的影响，先后测定了12名男性志愿者饮用咖啡前后运动状态下的心肌血流量，数据如下表所示，问饮用咖啡前后运动者的心肌血流量有无差异。

【例】續

编号	饮用前	饮用后
1	4.8	4.8
2	5.1	4.9
3	6.4	4.5
4	5.7	5.4
5	5.6	4.7
6	5.3	3.8
7	5.1	4.1
8	4.9	3.2
9	4.7	3.0
10	3.5	3.2
11	5.2	5.3
12	5.3	5.1

配對t檢驗步驟

- 建立檢驗假設，確定檢驗水準
    - H_0: $\mu_d = 0$ 飲用咖啡前後運動者的平均心肌血流量差異的總體均值為零
    - H_1: $\mu_d \neq 0$ 飲用咖啡前後運動者的平均心肌血流量差異的總體均值不為零
    - $\alpha = 0.05$
- 計算檢驗統計量

$$T = \frac{\bar{d} - \mu_d}{S_{\bar{d}}} = \mathbf{3.74} \sim t(11)$$

【續】

- 計算P值，做出結論
  - **P=0.003**小於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，拒絕原假設，接受備擇假設
  - 結論：兩種環境中運動者的心肌血流量有差異，引用前大於引用后

獨立樣本t檢驗

> 【例】某項研究評估低氧環境（模擬高原環境）對運動者的心肌血流量的影響，將17名男性志願者隨機分成兩組，分別在正常含氧環境（正常組）和低氧環境（低氧組）中測定運動後的心肌血流量，數據如下表所示，問兩種環境中運動者的心肌血流量有無差異。

【例】續

正常组心肌血流量(X_1)	低氧组心肌血流量(X_2)
3.5	6.4
3.1	5.7
3.1	5.6
2.7	5.3
2.5	5.1
2.3	4.9
2.3	4.7
2.2	3.5
2.2	

t檢驗的假定

- 樣本來自正態分佈
- 獨立樣本t檢驗：兩組的總體方差相同
- 方差齊性檢驗

檢驗方差齊性

- 如果方差齊性條件不滿足
- 辦法一：t' 檢驗
- 辦法二：非參數檢驗

獨立樣本t檢驗步驟

- 建立檢驗假設，確定檢驗水準
  - H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 兩種環境中運動者的心肌血流量的總體均數相同
  - H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ 兩種環境中運動者的心肌血流量的總體均數不同
  - $\alpha = 0.05$
- 計算檢驗統計量

$$T = -7.579 \sim t(15)$$

【續】

- **計算P值，做出結論**
  - **P=0.000**小於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，拒絕原假設，接受備擇假設
  - 結論：兩種環境中運動者的心肌血流量的總體均數不同，正常組小於低氧組

【例】兩組小白鼠分別飼以高蛋白和低蛋白飼料，4週後記錄小白鼠體重增加量(g)如下表所示，問兩組動物體重增加量的均數是否相等。

表 7-3　两种饲料喂养小白鼠 4 周后体重增重(g)情况

高蛋白組体重增加量(X_1)	低蛋白組体重增加量(X_2)
50	36
47	38
42	37
43	38
39	36
51	39
43	37
48	35
51	33
42	37
50	39
43	34
	36

獨立樣本 t' 檢驗步驟

- 建立檢驗假設，確定檢驗水準
  - H_0: $\mu_1 = \mu_2$ 即兩種飼料小白鼠增重總體均數相同
  - H_1: $\mu_1 \neq \mu_2$ 即兩種飼料小白鼠增重總體均數不同
  - $\alpha = 0.05$
- 計算檢驗統計量

$$T' = 7.017 \sim t(14.688)$$

【續】

- 計算P值，做出結論
  - **P=0.000**小於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，拒絕原假設，接受備擇假設
  - 結論：兩種飼料小白鼠增重總體均數不同，高蛋白組體重增加量更多

假設檢驗的兩類錯誤

真实情况	假设检验结论	
	拒绝H_0	不拒绝H_0
H_0成立	Ⅰ类错误（α）	推断正确（1-α）
H_1成立	推断正确（1-β）	Ⅱ类错误（β）

- 假設檢驗的功效
- 影響假設檢驗功效的因素：樣本量

方差分析

完全隨機設計的方差分析

- 完全隨機設計(completely randomized design):將實驗對象隨機分到不同處理組的單因素設計方法。
- 考察一個處理因素，通過對該因素不同水平組均值的比較，推斷它是否起作用。

Ronald Aylmer Fisher

【例】在評價某藥物耐受性及安全性的I期臨床試驗中，對符合納入標準的30名健康自願者隨機分為3組每組10名，各組注射劑量分別為0.5U、1U、2U，觀察48小時部分凝血活酶時間（s）試問不同劑量的部分凝血活酶時間有無不同？

	0.5 U	1 U	2 U	合计
	36.8	40.0	32.9	
	34.4	35.5	37.9	
	…	…	…	
	35.4	38.4	32.4	
	31.2	39.8	35.6	
n_i	10	10	10	30（n）
$\overline{X}_i$	33.6200	37.8300	35.1000	35.5167（$\overline{X}$）
S_i	2.2636	2.2071	3.3133	3.1072（S）

$$SS_{\text{総變異}} = SS_{\text{組間}} + SS_{\text{組内}}$$

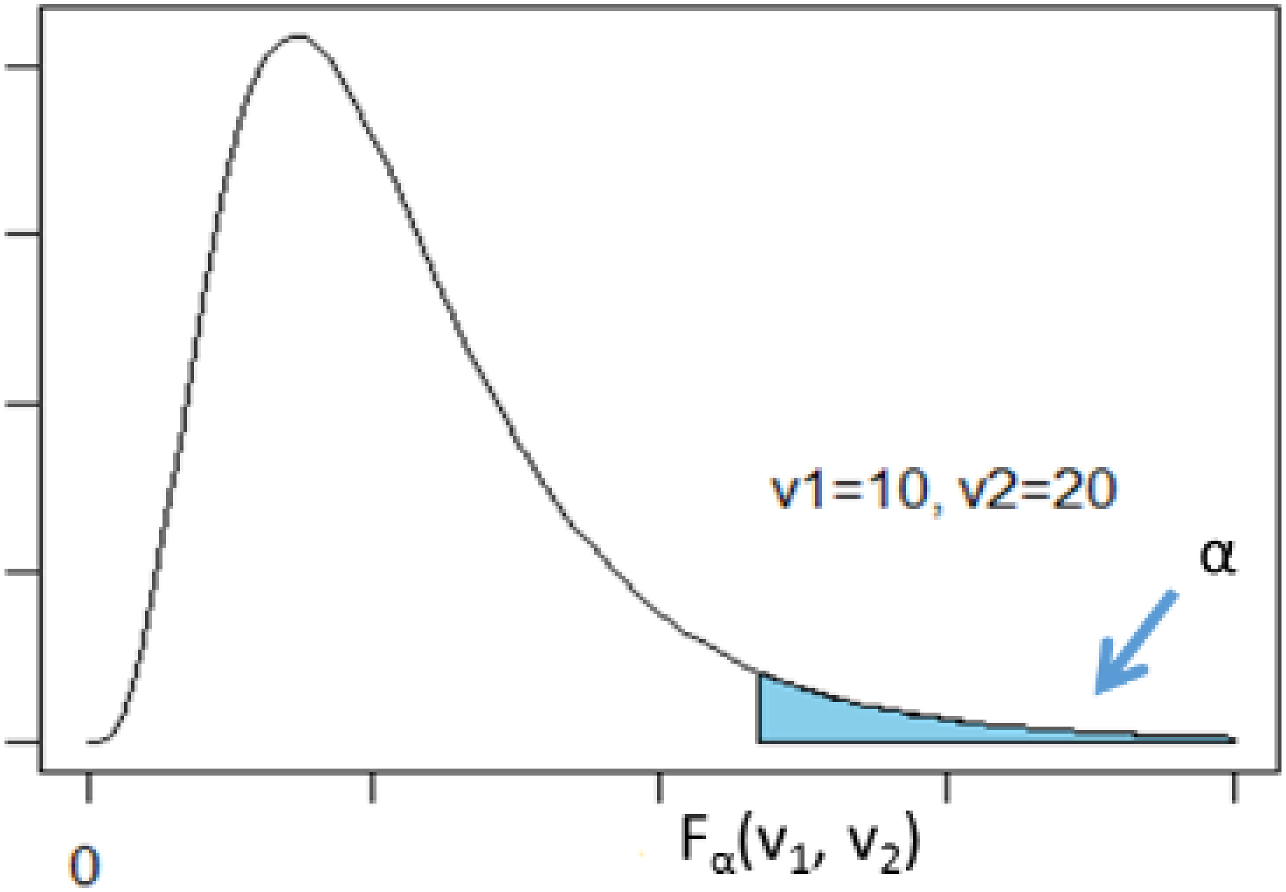
$$v_{\text{総變異}} = v_{\text{組間}} + v_{\text{組内}}$$

$$MS_{\text{組間}} = \frac{SS_{\text{組間}}}{v_{\text{組間}}}$$

$$MS_{\text{組内}} = \frac{SS_{\text{組内}}}{v_{\text{組内}}}$$

$$F = \frac{MS_{\text{組間}}}{MS_{\text{組内}}} \sim F(k-1, n-k)$$

F分佈



完全隨機設計的方差分析的假設檢驗

- 建立檢驗假設，確定檢驗水準
  - H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
  - H_1: μ_1, μ_2, μ_3不全相同
  - $\alpha = 0.05$
- 計算方差分析表

方差分析表

变异来源	平方和 SS	自由度 df	均方 MS	F 值	P值
总变异	279.9861	29			
组间	91.2247	2	45.6124	6.52	<0.05
组内	188.7614	27	6.9912		

- 根據P值，做出結論
  - **P**小於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，拒絕原假設，接受備擇假設
  - 結論：不同劑量的部分凝血活酶時間不全相同

隨機區組設計方差設計

- 又稱配伍因素方差設計
- 先將受試對象按條件相同或相近組成m個區組(或稱配伍組)，每個區組中有k個受試對象，再將其隨機地分到k個處理組中

$$SS_{\text{総變異}} = SS_{\text{處理}} + SS_{\text{區組}} + SS_{\text{誤差}}$$

$$v_{\text{総變異}} = v_{\text{處理}} + v_{\text{區組}} + v_{\text{誤差}}$$

$$MS_{\text{處理}} = \frac{SS_{\text{處理}}}{v_{\text{處理}}}, F = \frac{MS_{\text{處理}}}{MS_{\text{誤差}}}$$

$$MS_{\text{區組}} = \frac{SS_{\text{區組}}}{v_{\text{區組}}}, F = \frac{MS_{\text{區組}}}{MS_{\text{誤差}}}$$

$$MS_{\text{誤差}} = \frac{SS_{\text{誤差}}}{v_{\text{誤差}}}$$

【例】為探討Rg1 對鎘誘導大鼠睪丸損傷的保護作用，研究者按照窩別把大鼠分成10個區組，然後將同一區組內的3隻大鼠隨機地分配到三個實驗組，分別給與不同處理，一定時間後測量大鼠的睪丸MT含量（μg/g），數據如下表所示。試比較三種不同處理對大鼠MT含量有無差別?

三组大鼠 MT 含量值（μg/g）

窝别	对照组	氯化镉组	Rg1+氯化镉组	$\bar{X}_j$
1	40.6	78.3	116.3	78.4000
2	44.8	86.0	124.6	85.1333
3	36.7	72.1	149.0	85.9333
4	49.9	95.4	128.8	91.3667
5	59.8	99.2	134.1	97.7000
6	54.5	95.9	133.0	94.4667
7	38.4	76.4	115.6	76.8000
8	41.6	79.9	117.0	79.5000
9	46.8	86.5	128.4	87.2333
10	44.7	85.3	124.3	84.7667
$\bar{X}_i$	45.7800	85.5000	127.1100	86.1300（$\bar{X}$）

區組設計方差分析的假設檢驗

- 建立檢驗假設，確定檢驗水準
  - H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
  - H_1: μ_1, μ_2, μ_3不全相同
  - $\alpha = 0.05$
- 計算方差分析表

方差分析表

随机区组设计的方差分析表

变异来源	*SS*	*DF*	*MS*	*F* 值
总变异	35226.4630	29		
处理组间	33078.7980	2	16539.3990	341.92
区组间	1276.9630	9	141.8848	2.93
误差	870.7020	18	48.3723	

- 根據P值，做出結論
  - **P**小於**0.05**，在**0.05**的檢驗水平下，拒絕原假設，接受備擇假設
  - 結論：三組大鼠**MT**含量的總體均值不全相同

謝謝！